

LISTA POWTÓRKOWA 5: SZEREGI

1. Rozstrzygnij, czy poniższe szeregi są zbieżne:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi-2}},$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2},$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n - 1}{n^{11/3} + 1},$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{n^3 + 2},$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!},$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n},$$

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}},$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+4},$$

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n!}}{n^3},$$

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{2n}},$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan n},$$

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+6)}.$$

2. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^7 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1} + 1}}{n^7 + 1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

3. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n - 4) \cdot (3n - 1)}{n^3 - n}.$$

4. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot a^n}{n! \cdot n^{2n}}$$

w zależności od parametru dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

5. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$$

jest zbieżny.

6. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5.$$

7. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}.$$

8. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13.$$

9. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n^2}}{\sqrt{n} \cdot 5^{n^2}}.$$

10. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 35)^{n^2} \cdot x^{5n}}{n^{n^2}}.$$

11. Wyznacz sumę szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$